Cauchy-Goursat 定理

定理 1. 设 $\mathit{\Omega}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的区域，$\mathit{\Delta}$ 是 $\mathit{\Omega}$ 中的闭三角形区域，$\gamma=\partial\mathit{\Delta}$，$f\in H(\mathit{\Omega})$，则

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

证明. 设 $J=\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$,则 $|J|\geqslant 0$. 把 $\mathit{\Delta}$ 用三条中位线分成四个小三角形 $\mathit{\Delta}^{(1)},\mathit{\Delta}^{(2)},\mathit{\Delta}^{(3)},\mathit{\Delta}^{(4)}$. 记 $\gamma^{(i)}=\partial\mathit{\Delta}^{(i)}$，则

$$J=\sum_{i=1}^4\int_{\gamma^{(i)}}f(z)\,\mathrm{d}z.$$

于是

$$0\leqslant|J|\leqslant\sum_{i=1}^4\left|\int_{\gamma^{(i)}}f(z)\,\mathrm{d}z\right|.$$

至少有一个 $\mathit{\Delta}^{(i)}$ 满足

$$\left|\int_{\gamma^{(i)}}f(z)\,\mathrm{d}z\right|\geqslant\frac{1}{4}J.$$

记之为 $\mathit{\Delta}_1$，并设 $\gamma_1=\partial\mathit{\Delta}_1$. 对 $\mathit{\Delta}_1$ 进行类似的操作，得紧集套

$$\mathit{\Delta}\supseteq\mathit{\Delta}_1\supseteq\mathit{\Delta}_2\supseteq\cdots.$$

设 $\mathit{\Delta}$ 的周长为 L，最长边为 d，则 $\mathit{\Delta}_n$ 的周长为 $\dfrac{L}{2^n}$，最长边为 $\dfrac{d}{2^n}$. 且

$$\left|\int_{\gamma_n}f(z)\,\mathrm{d}z\right|\geqslant\frac{|J|}{4^n}.$$

由紧集套定理，存在 $z_0\in\displaystyle\bigcap_{i\geqslant1}\mathit{\Delta}_i$. 又 $f\in H(\mathit{\Omega})$，故 $f'(z_0)$ 存在. 即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得对任意 $z\in B(z_0,\delta)$ 都有

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\varepsilon|z-z_0|.$$

取充分大的 n，使 $\Delta_n\subseteq B(z_0,\delta)$. 对于 $z\in\Delta_n$，由几何关系有

$$|z-z_0|\leqslant\frac{d}{2^n}.$$

注意到

$$\int_{\gamma_n}\mathrm{d}z=\int_{\gamma_n}z\,\mathrm{d}z=0,$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_{\gamma_n} [f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)]\,\mathrm{d}z\right| \\ &\leqslant \int_{\gamma_n} |f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)||\,\mathrm{d}z| \\ &< \int_{\gamma_n} \varepsilon\frac{d}{2^n}|\,\mathrm{d}z| \\ &= \varepsilon\frac{L}{2^n}\frac{d}{2^n} \\ &= \frac{\varepsilon dL}{4^n}.\end{aligned}$$

则 $0<|J|\leqslant\varepsilon dL$. 令 ε 趋于 0，有 $|J|=0$，故

$$J=\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

□

推论 1. 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的区域，Σ 是 Ω 中的闭多边形区域，$\gamma=\partial\Sigma$，$f\in H(\Omega)$，则

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

定理 2. 设 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 是凸区域，γ 是 Ω 中分段 C^1 的闭道路，$f\in H(\Omega)$，则

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

证明. 任取 a，对于 $z\in\Omega$，记 $[a,z]$ 是从 a 到 z 的直线段，则 $[a.z]\subset\Omega$. 由于 f 连续，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得任意 $\zeta\in B(z_0,\delta)\cap\Omega$ 有

$$|f(\zeta)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

定义

$$F(z)=\int_{[a,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

则由定理1有

$$F(z)-F(z_0)=\left(\int_{[a,z]}-\int_{[a,z_0]}\right)f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

而由 Newton-Leibnitz 公式有

$$f(z_0)=\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} f(z_0)\,\mathrm{d}\zeta,$$

故

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} f(z_0)\,\mathrm{d}\zeta\right|$$
$$= \left|\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} [f(\zeta)-f(z_0)]\right|$$
$$< \frac{(z-z_0)\varepsilon}{z-z_0} = \varepsilon.$$

于是 $F'(z) = f(z)$，因为 γ 是闭曲线，所以起点和终点相同，即 $\gamma(a) = \gamma(b)$. 由 Newton-Leibniz 公式有

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)) = 0.$$

□

定义 1 (单连通)**.** 对于 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$，若 Ω 中的简单闭曲线 γ 的内部区域 $\mathrm{Int}(\gamma)$ 都是 Ω 的子集，则称 Ω 是**单连通**的.

定理 3. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 是单连通区域，γ 是 Ω 中的分段线性闭曲线，$f \in H(\Omega)$，则

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

证明. 把 γ 的图像视为一些多边形 $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$ 的边界，每个多边形 $\Sigma \subseteq \Omega$，则由推论1得

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Sigma_i} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

□

引理 1. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 是单连通区域，$\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega$ 是 Ω 中分段 C^1 的曲线，$f \in H(\Omega)$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在分段线性曲线 $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \Omega$ 使得 $\widetilde{\gamma}(\alpha) = \gamma(\alpha)$，$\widetilde{\gamma}(\beta) = \gamma(\beta)$ 且

$$\left|\int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \varepsilon.$$

定理 4. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 是单连通区域，γ 是 Ω 中分段 C^1 的闭曲线，$f \in H(\Omega)$，则

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

证明. 由定理3及引理1立即可得. □

定义 2 (同伦)**.** 设区域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$，$\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ 是两条闭曲线，若存在连续函数 $F : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ 满足

$$F(t,0) = \gamma_0(t),$$
$$F(t,1) = \gamma_1(t),$$
$$F(0,s) = F(1,s),$$

则称 γ_0 和 γ_1 是**同伦**的，记为 $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

注. 事实上，同伦是等价关系.

定义 3 (零伦). 设区域 $\varOmega \subseteq \mathbb{C}$，对于 $z_0 \in \varOmega$，称 $\gamma_0 : [0,1] \to \varOmega,\ t \mapsto z_0$ 为 z_0 的**常值道路**. 若 γ_1 同伦于 z_0 的常值道路，则称 γ_1 是**零伦**的.

定义 4 (单连通). 若 $\varOmega$ 中任一闭曲线都是零伦的，则称 $\varOmega$ 是**单连通** 的.

注. 可以证明，这里的定义与前面定义的单连通等价.

定理 5. 设区域 $\varOmega \subseteq \mathbb{C}$，$\gamma_0, \gamma_1$ 是 $\varOmega$ 中同伦的分段 C^1 闭曲线，$f \in H(\varOmega)$，则

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

特别地，若 γ 是零伦的，则

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

证明. 记 $\varGamma = \mathrm{Im}(F)$，$d_0 = \mathrm{dist}(\varGamma, \partial\varOmega)$. 因为 $[0,1]^2$ 是紧集，所以 F 在 $[0,1]^2$ 上一致连续. 所以存在 $\delta > 0$ 使得当 $\max\{|t'' - t'|, |s'' - s'|\} < \delta$ 时，

$$|F(t'', s'') - F(t', s')| < d_0.$$

取 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n > 1/\delta$，把 $[0,1]^2$ 等分为 n^2 个小正方形. 记 $P_{i,j} = F(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}),\ i,j = 0,1,\cdots,n$. 注意到

$$|P_{i+a,j+b} - P_{ij}| < d_0, \quad a, b \in \{0,1\},$$

于是

$$\square_{ij} := P_{i,j}P_{i+1,j}P_{i,j+1}P_{i+1,j+1} \subseteq B(P_{i,j}, d_0) \subset \varOmega.$$

其中 $\square_{ij}$ 是凸区域. 由定理2，有

$$\int_{\square_{ij}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

对 $j = 0,1,\cdots,n-1$，有

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{[P_{i,j}, P_{i+1,j}]} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}]} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

从而

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{[P_{i,0}, P_{i+1,0}]} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[P_{i,n}, P_{i+1,n}]} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

设 $[P_{i,0}, P_{i+1,0}]$ 对应的曲线段为

$$\gamma_{0,i} : \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \to \varOmega.$$

对于 $t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$，有 $\gamma_{0,i}(t) = F(t, 0)$，于是

$$\max\left\{\left|t - \frac{i}{n}\right|, |0-0|\right\} = \left|t - \frac{i}{n}\right| < \frac{1}{n} < \delta.$$

所以 $|\gamma_{0,i}(t) - P_{i,0}| < d_0$，有 $\mathrm{Im}(\gamma_{0,i}) \subseteq B(P_{i,0}, d_0)$，再由定理2，有

$$\int_{[P_{i,0},P_{i+1,0}]} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{0,i}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{i=0}^{n-1} \int \gamma_{0,i} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[P_{i,0},P_{i+1,0}]} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[P_{i,n},P_{i+1,n}]} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int \gamma_{1,i} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

□

推论 2. 设区域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$，$f \in H(\Omega)$. 设 $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ 是分段 C^1 曲线，若 $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$，$\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ 且存在连续函数 $F : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ 满足

$$F(t,0) = \gamma_0,$$

$$F(t,1) = \gamma_1,$$

$$F(0,s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0),$$

$$F(1,s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1),$$

则有

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

证明. 定义

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \gamma_1(2-2t), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

则可以证明 γ 是零伦的，于是

$$0 = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \left(\int_{\gamma_0} f(z) - \int_{\gamma_1}\right) f(z)\,\mathrm{d}z.$$

故

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

□

定理 6. 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的有界区域，$\gamma = \partial\Omega$ 由有限多条可求长简单闭曲线组成，$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ 连续，且 $f|_{\Omega} \in H(\Omega)$，则

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$